

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapă locală-februarie 2013

Filiera teoretică: profilul uman

Clasa XII

1. Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 2a & a+1 & a+2 \\ 0 & a-1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează cu $S_1(A)$ suma elementelor din prima coloană, cu $S_2(A)$ suma elementelor din a doua coloană, cu $S_3(A)$ suma elementelor din a treia coloană și cu M mulțimea de matrice $M = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid S_1(A) = S_2(A) = S_3(A)\}$.
- a) Să se calculeze $X(1) - 2I_3$.
- b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $\begin{pmatrix} 2a & -7 & 2 \\ 2-2b & 2a-1 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ să aparțină mulțimii M .
- c) Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, matricea $C = X(a) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .

Soluție:

- a) $X(1) - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 2p
- b) $S_1(A) = 5 + 2a - 3b$
 $S_2(A) = -5 + 2a$
 $S_3(A) = -1$
 Deci $a=2, b=5$2p
- c) $C = X(a) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 3a+1 & 2a+2 \\ 0 & a-1 & 2a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2p
 $S_1(C) = S_2(C) = S_3(C) = 4a$1p

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze A^{2013} .
- b) Să se calculeze $(2A + A^{-1}) \cdot (A - 2A^{-1})$.
- c) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot X \cdot A^{-1} = A + I_2$.

Soluție:

- a) $A^2 = -I_2$1p
 $A^4 = I_2$1p
 $A^{2013} = A$1p
- b) Din $A^4 = I_2 \Rightarrow A^{-1} = A^3 = -A$1p
 $(2A + A^{-1}) \cdot (A - 2A^{-1}) = A \cdot 3A = 3A^2 = -3I_2$1p
- c) $X = A^{-1} \cdot (A + I_2) \cdot A = -A(A + I_2)A = -(A^2 + A)A = -(-I_2 + A)A$1p
 $= -(-A + A^2) = -(-A - I_2) = A + I_2$1p

3. Fie sistemul de ecuații
$$\begin{cases} (2 + a^2)x + y + z = 1 \\ x + (2 + b^2)y + z = 1, a, b \in \mathbb{R}. \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Să se arate că $\det(A) \geq 1, \forall a, b \in \mathbb{R}$, unde A este matricea asociată sistemului.

b) Pentru $a=0, b=0$ să se rezolve sistemul dat.

Soluție:

a) $\det A = a^2 b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq 1$3p

b) sistemul devine
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$
.....1p

$x = 0, y = 0, z = 1$3p

4. Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ și $A = M + aI_2, a \in \mathbb{R}$

a) Pentru a număr real nenul să se calculeze inversa matricei A.

b) Să se calculeze $A^3 - a^2(3M + aI_2)$.

Soluție:

a) $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ -4 & a-2 \end{pmatrix}$1p

$\det A = a^2 \neq 0$1p

$A^{-1} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a-2 & -1 \\ 4 & a+2 \end{pmatrix}$2p

b) $M^2 = O_2$1p

$A^2 = (M + aI_2)(M + aI_2) = M^2 + aM + aM + a^2I_2 = 2aM + a^2I_2$1p

$A^3 = (2aM + a^2I_2)(M + aI_2) = 2aM^2 + 2a^2M + a^2M + a^3I_2$
 $= 3a^2M + a^3I_2$1p